Научная статья
УДК 514,517.926
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-87-101

РЕШЕНИЕ ДВУХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Владимир Александрович Кыров

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

kyrovVA@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

Аннотация

В данной статье решаются две системы функциональных уравнений, которые возникают вследствие решения задачи вложения аддитивной и мультипликативной двуметрической феноменологически симметричной геометрии ранга (2,2) в одну из двуметрических феноменологически симметричных геометрий ранга (3,2). В процессе поиска невырожденных решений исходных систем функциональных уравнений сначала сводим их к системам дифференциальных уравнений. Затем с решениями полученных систем дифференциальных уравнений возвращаемся в исходные системы функциональных уравнений, откуда находятся дополнительные ограничения.

Ключевые слова и фразы

Ключевые слова и фразы: геометрия двух множеств, Жорданова форма матрицы, система функциональных уравнений, система дифференциальных уравнений.

Для цитирования

Кыров В. А. Решение двух систем функциональных уравнений // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 87-101. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-87-101

Solution of two systems of functional equations

Vladimir A. Kyrov

Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia

kyrovVA@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

Abstract

In this article, we solve two systems of functional equations that arise as a result of solving the problem of embedding an additive and multiplicative two-dimensional phenomenologically symmetric geometry of rank (2,2) into one of the two-dimensional phenomenologically symmetric geometries of rank (3,2). In the process of searching for non-degenerate solutions of the original systems of functional equations, we first reduce them to systems of differential equations. Then, with the solutions of the obtained systems of differential equations, we return to the original systems of functional equations, from which additional constraints are found.

Keywords

geometry of two sets, Jordan form of a matrix, system of functional equations, system of differential equations.

For citation

Kyrov V. A. Solution of two systems of functional equations // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 87-101. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-87-101

Введение.

Как известно, двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга (n+1,2), где $n \in \mathbb{N}$, задается на двумерном и $2n$-мерном дифференцируемых многообразиях M и N дифференцируемой функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M \times N \to R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, сопоставляющей паре точек два действительных числа $f = (f^1, f^2)$ [1, 2]. В координатах:

$$f = f(x, y, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^{2n}),$$

где (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^{2n})$ — локальные координаты в многообразиях M и N соответственно.

Дополнительно выполняются следующие аксиомы:

Аксиома 1. Координатное представление функции f невырождено относительно двух координат x, y и $2n$ координат $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^{2n}$.

Невырожденность функции f выражается необращением в нуль якобианов:

$$\partial(f^1(i,\alpha), f^2(i,\alpha))/\partial(x_i, y_i) \neq 0,$$

$$\partial\big(f^1(i_1,\alpha), f^2(i_1,\alpha), ..., f^1(i_n,\alpha), f^2(i_n,\alpha)\big)/\partial\big(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, ..., \xi^{2n}_\alpha\big) \neq 0,$$

где (x_i, y_i) — координаты точки $i \in M$, а $\big(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, ..., \xi^{2n}_\alpha\big)$ — координаты точки $\alpha \in N$.

Аксиома 2. Для плотного и открытого множества точек $(i_1, i_2, ..., i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi(f^1\bigl(i_1, \alpha_1), f^2(i_1, \alpha_1), ..., f^1(i_{n+1}, \alpha_2), f^2(i_{n+1}, \alpha_2)\bigr) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — двухкомпонентная регулярная функция 4(n+1) переменных.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств появились в теории физических структур, разработанной Ю.И. Кулаковым и Г.Г. Михайличенко [3, 4]. Классификация этих геометрий получена Г.Г. Михайличенко, которую можно найти в работах [1, 2, 5, 6, 7]. Она содержит в себе три геометрии:

для n=1:

$$f^1 = x + \xi,\ f^2 = y + \eta;$$
$$f^1 = (x + \xi)y,\ f^2 = (x + \xi)\eta,$$

для n=2:

$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu,\ c \neq 1.$$

Пусть функция $g = (g^1, g^2) = g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга (n+1,2), а функция $f = (f^1, f^2) = f(x', y'; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ — ДФС ГДМ ранга (n+2,2), где n = 1,2,3.

Определение.([5]) Будем говорить, что *ДФС ГДМ ранга (n+1,2) вложена в ДФС ГДМ ранга (n+2,2)*, если выполняется функциональное соотношение

$$f\left(x', y'; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}\right) = \chi\left(g\left(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n}\right), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right),$$

где $\chi = \chi(g^1, g^2, \xi^{2m+1}, \xi^{2n+2})$, $x' = \lambda^1(x, y)$, $y' = \lambda^2(x, y)$, $\eta^1 = \tau^1(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \dots,$ $\eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ – дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства:

$$\Delta = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \Box = \frac{\partial(\eta^1, \dots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{2n+2})} \neq 0.$$

В работе [5] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга (n+2,2) вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга (n+1,2), где n = 1,2,3.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений ДФС ГДМ ранга (2,2) с двухкомпонентными функциями

$$g^1 = x + \xi,\ g^2 = y + \eta;$$

$$g^1 = (x + \xi)y,\ g^2 = (x + \xi)\eta,$$

в ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu,\ c \neq 1.$$

Решение этой задачи сводится к решению систем функциональных уравнений.

В работе [8] была решена подобная задача о вложении аддитивной ДФС ГДМ ранга (2,2) с двухкомпонентной функцией

$$g^1 = x + \xi, g^2 = y + \eta$$

в ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + y\mu, f^2 = x\eta + y\nu;$$

в работе [7] решена задача вложения мультипликативной ДФС ГДМ ранга (2,2)

$$g^1 = (x + \xi)y, g^2 = (x + \xi)\eta$$

в мультипликативную ДФС ГДМ ранга (3,2)

$$f^1 = x\xi + y\mu, f^2 = x\eta + y\nu;$$

в работе [9] решена задача вложения ДФС ГДМ ранга (3,2), связанных с комплексными, двойными и дуальными числами

$$g^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, g^2 = x\eta + y\xi + \nu,\ \varepsilon = -1, 1, 0$$

в аффинную ДФС ГДМ ранга (4,2)

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, f^2 = x\eta + y\nu + \tau,$$

а в работе [10] решена задача вложения мультипликативной ДФС ГДМ ранга (3,2)

$$f^1 = x\xi + y\mu, f^2 = x\eta + y\nu$$

в аффинную ДФС ГДМ ранга (4,2)

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, f^2 = x\eta + y\nu + \tau.$$

§1. Постановка первой задачи.

Выше сформулированная задача нахождения всех вложений аддитивной ДФС ГДМ ранга (2,2) с двухкомпонентной функцией $g(x,y,\xi,\eta) = (g^1,g^2) = (x+\xi,y+\eta)$ в ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией $f(x,y,\xi,\eta,\mu,\nu) = (f^1,f^2) = (x\xi+\mu, x\eta+y\xi^c+\nu), c \neq 1$ сводится к решению системы двух функциональных уравнений

$$\bar{x}\bar{\xi}+\bar{\mu} = \chi^1(x+\xi,y+\eta,\mu,\nu), \;\; \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\xi}^c+\bar{\nu} = \chi^2(x+\xi,y+\eta,\mu,\nu),\; c\neq 1,$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x,y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ — дифференцируемые функции.

Введём обозначения, которые будут использоваться ниже: $\bar{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & 0 \\ \bar{\eta} & \bar{\xi}^c \end{pmatrix}$, $\Xi = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \eta & \xi^c \end{pmatrix}$, $\bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}$, $\widehat{\Xi} = \begin{pmatrix} \widehat{\xi} & 0 \\ \widehat{\eta} & \widehat{\xi}^c \end{pmatrix}$, $\widehat{R} = \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\nu} \end{pmatrix}$, $\Xi_1 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\widehat{\xi} = \widehat{\xi}(\mu,\nu), \widehat{\eta} = \widehat{\eta}(\mu,\nu), \widehat{\mu} = \widehat{\mu}(\mu,\nu), \widehat{\nu} = \widehat{\nu}(\mu,\nu), \widehat{p} = \widehat{p}(\mu,\nu), \widehat{q} = \widehat{q}(\mu,\nu), \widehat{x} = \widehat{x}(y), \widehat{y} = \widehat{y}(y)$ — дифференцируемые функции.

Тогда, исходная система функциональных уравнений принимает простой матричный вид:

$$\bar{\Xi}\bar{X} + \bar{R} = \chi. \tag{1}$$

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(x,y)} \neq 0, \;\; \Box = \frac{\partial(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0. \tag{2}$$

Далее находим невырожденные решения системы (1). Отметим, что матрица $\bar{\Xi}$ невырождена, поскольку иначе $\bar{\xi}^{c+1} = 0$, что противоречит неравенству $\Box \neq 0$ в (2).

Дифференцируем матричное уравнение (1) по переменным x,y,ξ,η:

$$\bar{\Xi}\bar{X}_x = \chi_u,\; \bar{\Xi}\bar{X}_y = \chi_v,\; \bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{R}_\xi = \chi_u,\; \bar{\Xi}_\eta\bar{X} + \bar{R}_\eta = \chi_v, \tag{3}$$

где $u = x+\xi, v = y+\eta$.

Далее, исключаем в полученных соотношениях производные χ_u, χ_v:

$$\bar{\Xi}\bar{X}_x = \bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{R}_\xi,\; \bar{\Xi}\bar{X}_y = \bar{\Xi}_\eta\bar{X} + \bar{R}_\eta$$

или
$$\bar X_x = \bar\Xi^{-1}\Xi_\xi \bar X + \bar\Xi^{-1}\bar R_\xi,\ \bar X_y = \bar\Xi^{-1}\Xi_\eta \bar X + \bar\Xi^{-1}\bar R_\eta. \tag{4}$$

Теорема 1. *Общее невырожденное решение функционального уравнения (1) при $c \neq 0$, $c \neq 1$, с точностью до подходящей замены координат, может быть представлено в следующем виде:*
$$\bar X = \Lambda X + A_1,\ \bar\Xi = \widehat\Xi,\ \bar R = \widehat R + \widehat\Xi \Lambda \Xi_1,\ \chi = \widehat\Xi\Lambda(X + \Xi_1) + \widehat R, \tag{5}$$
причем $\Lambda = const$, $A_1 = const$;
$$\left\{\begin{array}{c} \bar x = \beta y + a_3,\ \bar y = \gamma x + b_2\beta y^2/2 + (b_2 a_3 + \delta)y + b_3,\\ \bar\xi = \widehat\xi,\ \bar\eta = b_2\eta\widehat{\xi^c} + \widehat\eta,\\ \bar\mu = \beta\eta\widehat\xi + \widehat\mu,\ \bar\nu = \gamma\xi\widehat{\xi^c} + \beta b_2\eta^2\widehat{\xi^c}/2 + \beta\eta\widehat\eta + \delta\eta\widehat{\xi^c} + \widehat\nu,\\ \chi^1 = \beta v\widehat\xi + \widehat\mu + a_3\widehat\xi,\\ \chi^2 = \gamma u\widehat{\xi^c} + \beta b_2 v^2\widehat{\xi^c}/2 + \beta v\widehat\eta + (b_2 a_3 + \delta)v\widehat{\xi^c} + \widehat\nu + a_3\widehat\eta + b_3\widehat{\xi^c}; \end{array}\right. \tag{6}$$
$$\left\{\begin{array}{c} \bar x = \alpha x + \beta y + a_3,\\ \bar y = \alpha b_1 x^2/2 + \beta b_1 xy + \beta b_2 y^2/2 + (a_3 b_1 + \gamma)x + (a_3 b_2 + \delta)y + b_3,\\ \bar\xi = \widehat\xi,\ \bar\eta = (b_1\xi + b_2\eta)\widehat{\xi^c} + \widehat\eta,\\ \bar\mu = \beta(b_1\xi + b_2\eta)\widehat\xi + \widehat\mu,\\ \bar\nu = \gamma\xi\widehat{\xi^c} + \beta(b_1\xi + b_2\eta)^2\widehat{\xi^c}/2 + \beta(b_1\xi + b_2\eta)\widehat\eta + \delta(b_1\xi + b_2\eta)\widehat{\xi^c} + \widehat\nu,\\ \chi^1 = \beta(b_1 u + b_2 v)\widehat\xi + \widehat\mu + a_3\widehat\xi,\\ \chi^2 = \gamma u\widehat{\xi^c} + \beta(b_1 u + b_2 v)^2\widehat{\xi^c}/2 + \beta(b_1 u + b_2 v)\widehat\eta\\ +(a_3 + \delta)(b_1 u + b_2 v)\widehat{\xi^c} + \widehat\nu + a_3\widehat\eta + b_3\widehat{\xi^c}; \end{array}\right. \tag{7}$$
$$\left\{\begin{array}{c} \bar x = a_3 e^{a_1 x + a_2 y} - \alpha/a_1,\ \bar y = b_3 e^{c(a_1 x + a_2 y)} - \gamma/c a_1,\\ \bar\xi = \widehat\xi e^{a_1\xi + a_2\eta},\ \bar\eta = \widehat\eta e^{a_1\xi + a_2\eta},\\ \bar\mu = \widehat\xi e^{a_1\xi + a_2\eta}\alpha a_2/a_1^2 + \widehat\mu,\ \bar\nu = \widehat\eta e^{a_1\xi + a_2\eta}\alpha a_2/a_1^2 + \widehat{\xi^c} e^{a_1\xi + a_2\eta}\gamma a_2/a_1^2 + \widehat\nu,\\ \chi^1 = a_3\widehat\xi e^{a_1 u + a_2 v} + \widehat\mu,\ \chi^2 = a_3\widehat\eta e^{a_1 u + a_2 v} + b_3\widehat{\xi^c} e^{a_1 u + a_2 v} + \widehat\nu, \end{array}\right. \tag{8}$$
$a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ a_1\beta = a_2\alpha,\ a_1\delta = a_2\gamma,\ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta = const.$

Теорема 2. *Общее невырожденное решение функционального уравнения (1) при $c = 0$, с точностью до подходящей замены координат, может быть представлено в следующем виде:*
$$\bar X = \Lambda X + A_1,\ \bar\Xi = \widehat\Xi,\ \bar R = \widehat R + \widehat\Xi \Lambda \Xi_1,\ \chi = \widehat\Xi\Lambda(X + \Xi_1) + \widehat R, \tag{9}$$
причем $\Lambda = const$, $A_1 = const$;
$$\left\{\begin{array}{c} \bar x = \beta y + a_3,\ \bar y = \gamma x + b_2\beta y^2/2 + (b_2 a_3 + \delta)y + b_3,\\ \bar\xi = \widehat\xi,\ \bar\eta = b_2\eta + \widehat\eta,\\ \bar\mu = \beta\eta\widehat\xi + \widehat\mu,\ \bar\nu = \gamma\xi + \beta b_2\eta^2/2 + \beta\eta\widehat\eta + \delta\eta + \widehat\nu,\\ \chi^1 = \beta v\widehat\xi + \widehat\mu + a_3\widehat\xi,\\ \chi^2 = \gamma u + \beta b_2 v^2/2 + \beta v\widehat\eta + (b_2 a_3 + \delta)v + \widehat\nu + a_3\widehat\eta + b_3; \end{array}\right. \tag{10}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 87-101
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 87-101

$$
\begin{cases}
\bar{x} = (a_3 e^{a_1 x + a_2 y} - \beta)/a_2,\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + b_3, \\
\bar{\xi} = \widehat{\xi} e^{a_1 \xi + a_2 \eta},\ \bar{\eta} = \widehat{\eta} e^{a_1 \xi + a_2 \eta}, \\
\bar{\mu} = \widehat{\xi} e^{a_1 \xi + a_2 \eta} \beta / a_2 + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \widehat{\eta} e^{a_1 \xi + a_2 \eta} \beta / a_2 + \gamma \xi + \delta \eta + \widehat{\nu}, \\
\chi^1 = \widehat{\xi} e^{a_1 u + a_2 v} a_3 / a_2 + \widehat{\mu},\ \chi^2 = \widehat{\eta} e^{a_1 u + a_2 v} a_3 / a_2 + \gamma u + \delta v + b_3 + \widehat{\nu},
\end{cases} \tag{11}
$$

$a_2 \neq 0,\ a_1 \beta = a_2 \alpha,\ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta = const.$

Подробно докажем только теорему 1. Теорема 2 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Систему (4) перепишем в следующем виде:

$$
\bar{X}_x = \bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1,\ \bar{X}_y = \bar{B}\bar{X} + \bar{B}_1, \tag{12}
$$

причем $\bar{A} = \bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\xi = \begin{pmatrix} (\ln\bar{\xi})_\xi & 0 \\ (\bar{\eta}/\bar{\xi})_\xi / \bar{\xi}^{c-1} & c(\ln\bar{\xi})_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c a_1 \end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\eta = \begin{pmatrix} (\ln\bar{\xi})_\eta & 0 \\ (\bar{\eta}/\bar{\xi})_\eta / \bar{\xi}^{c-1} & c(\ln\bar{\xi})_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c a_2 \end{pmatrix}$, $\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$, где $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — дифференцируемые функции переменных ξ, η, μ, ν.

Лемма 1. *В системе* (12) $\bar{A} = const$, $\bar{B} = const$, $\bar{A}_1 = const$ *и* $\bar{B}_1 = const$.

Доказательство. Действительно, продифференцируем первое уравнение в (12) по x и ξ, а также по y и ξ: $\bar{A}_\xi \bar{X}_x = 0$, $\bar{A}_\xi \bar{X}_y = 0$, следовательно, согласно первому неравенству в (2) получаем $\bar{A}_\xi = 0$. Если аналогично дифференцировать по η, μ, ν, а также по x и y, то получим $\bar{A}_\eta = \bar{A}_\mu = \bar{A}_\nu = 0$, следовательно $\bar{A} = \mathrm{const}$. Аналогично поступая со вторым уравнением в (12), имеем $\bar{B} = \mathrm{const}$. Затем возвращаясь в (12), получаем $\bar{A}_1 = \mathrm{const}$ и $\bar{B}_1 = \mathrm{const}$.

Лемма 2. *Матрицы* $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$ *коммутативны, то есть* $\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} = 0$ *или* $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Доказательство. Для проверки коммутативности матриц, необходимо первое уравнение в (12) продифференцировать по y, а второе по x, после чего приравнять правые части: $\bar{A}\bar{X}_y = \bar{B}\bar{X}_x$. Затем воспользовавшись выражениями (12), получаем $\bar{A}(\bar{B}\bar{X} + \bar{B}_1) = \bar{B}(\bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1)$. Сравнивая коэффициенты перед $\bar{X}$, доказываем коммутативность матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Лемма 3. *Функции* $\bar{\xi}$ *и* $\bar{\eta}$ *с дополнительным условием* $b_1 = 0, b_2 \neq 0$, $a_1 = a_2 = 0$ *имеют следующие явные представления:*

$$
\bar{\xi} = \widehat{\xi},\ \bar{\eta} = b_2 \eta \widehat{\xi}^c + \widehat{\eta},
$$

$c \neq 1, c \neq 0$.

Доказательство следует из явных выражений для матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть сначала $\bar{A} = 0$, тогда из первого уравнения в (12) получаем $\bar{X} = x\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix}$, причем, в силу первого неравенства из (2), $\alpha^2+\gamma^2\neq 0$. Подставляем во второе уравнение: $\begin{pmatrix}\widehat{x}'\\ \widehat{y}'\end{pmatrix} = \bar{B}\left(x\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widehat{x}\\ \widehat{y}\end{pmatrix}\right)+\bar{B}_1$, следовательно $\bar{B}\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=0$, $\begin{pmatrix}\widehat{x}'\\ \widehat{y}'\end{pmatrix} = \bar{B}\begin{pmatrix}\widehat{x}\\ \widehat{y}\end{pmatrix}+\bar{B}_1$. Очевидно, $\det\bar{B}=ca_2^2=0$, тогда $a_2=0$. Возможны два случая: $b_2=0$ и $b_2\neq 0$. В первом случае из (12) получаем $\bar{X}=\Lambda X+A$, далее возвращаясь в (4) и (1), приходим к (9), при этом учитываем лемму 3. Во втором случае получаем $\bar{x}=\alpha x+\beta y+a_3$, $\bar{y}=\gamma x+\alpha b_2 xy+b_2\beta y^2/2+(b_2a_3+\delta)y+b_3$. Воспользовавшись равенством смешанных производных, получаем $\alpha b_2=0$, поэтому $\alpha=0$. Тогда будем иметь $\bar{x}=\beta y+a_3$, $\bar{y}=\gamma x+b_2\beta y^2/2+(b_2a_3+\delta)y+b_3$. Далее воспользовавшись леммой 3, получаем $\bar{\xi}=\widehat{\xi}$, $\bar{\eta}=b_2\eta\widehat{\xi}^c+\widehat{\eta}$. Из равенств (4) и (3) вытекает $\bar{\mu}=\beta\eta\widehat{\xi}+\widehat{\mu}$, $\bar{\nu}=\gamma\xi\widehat{\xi}^c+\beta b_2\eta^2\widehat{\xi}^c/2+\beta\eta\widehat{\eta}+\delta\eta\widehat{\xi}^c+\widehat{\nu}$, $\chi^1=\beta v\widehat{\xi}+\widehat{p}$, $\chi^2=\gamma u\widehat{\xi}^c+\beta b_2v^2\widehat{\xi}^c/2+\beta v\widehat{\eta}+(b_2a_3+\delta)v\widehat{\xi}^c+\widehat{q}$. Таким образом, получены равенства (10).

С точностью до переобозначения координат x и y считаем $\bar{A}\neq 0$ и $\bar{B}\neq 0$.

Пусть $\det\bar{A}=ca_1^2=0$, тогда из леммы 2 $\det\bar{B}=ca_2^2=0$, то есть $\bar{A}=\begin{pmatrix}0&0\\ b_1&0\end{pmatrix}$, $\bar{B}=\begin{pmatrix}0&0\\ b_2&0\end{pmatrix}$, причем $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$. Значит система (12) в явной записи имеет следующий вид:

$$\bar{x}_x=\alpha,\ \bar{x}_y=\beta,\ \bar{y}_x=b_1\bar{x}+\gamma,\ \bar{y}_y=b_2\bar{x}+\delta,\ b_1\neq 0,\ b_2\neq 0.$$

Далее интегрируя эту систему, получаем (7).

Остаётся последний случай, то есть когда $\det\bar{A}\neq 0$ и $\det\bar{B}\neq 0$.

Произведём допустимое структурой функциональных уравнений системы (1) преобразование

$$\bar{X}'=U\bar{X}\Rightarrow\bar{X}=U^{-1}\bar{X}',$$

$$\bar{X}'_x=U\bar{X}_x=UA\bar{X}+UA_1=UAU^{-1}\bar{X}'+UA_1=A'\bar{X}'+A'_1.$$

с невырожденной постоянной матрицей U второго порядка.

Первое уравнение из системы (12) в прежних обозначениях принимает следующий вид:

$$\bar{X}_x=UAU^{-1}\bar{X}+A_1.$$

Известно (см. [11], с. 485), что матрица A второго порядка с вещественными элементами преобразованием $A\to UAU^{-1}$ может быть приведена жордановой форме:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}a_1&0\\ 0&ca_1\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Из выше доказанной леммы тогда вытекает

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & ca_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Заметим, что $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$.

Тогда система (12) в явном виде записывается так:

$$\bar{x}_x = a_1\bar{x} + \alpha,\ \bar{x}_y = a_2\bar{y} + \beta,\ \bar{y}_x = ca_1\bar{x} + \gamma,\ \bar{y}_y = ca_2\bar{y} + \delta,$$

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_1\beta = a_2\alpha$, $a_1\delta = a_2\gamma$. Интегрируя эту систему, получаем

$$\bar{x} = c_1 e^{a_1\xi + a_2\eta} - \alpha/a_1,\ \bar{y} = c_2 e^{c(a_1\xi + a_2\eta)} - \gamma/ca_1.$$

Затем найденное подставляя в (4), получаем (11).

Теорема 1 доказана полностью.

§2. Постановка второй задачи.

Решим теперь задачу вложения мультипликативной ДФС ГДМ ранга (2,2) с двухкомпонентной функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = ((x+\xi)y, (x+\xi)\eta)$ в ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi^c + \nu), c \neq 1$. Она сводится к решению системы двух функциональных уравнений

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu),\ \ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^c + \bar{\nu} = \chi^2((x+\xi)y, (x+\xi)\eta, \mu, \nu),$$

где, как и выше, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ — дифференцируемые функции соответствующих переменных. С учетом выше введенных матричных обозначений эта система функциональных уравнений принимает вид (1). Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее условиям (2).

Дифференцируем матричное уравнение (1) по переменным x, y, ξ, η:

$$\begin{gathered} \bar{\Xi}\bar{X}_x = y\chi_u + \eta\chi_v,\ \bar{\Xi}\bar{X}_y = (x+\xi)\chi_u, \\ \bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{R}_\xi = y\chi_u + \eta\chi_v,\ \bar{\Xi}_\eta\bar{X} + \bar{R}_\eta = (x+\xi)\chi_v, \end{gathered} \tag{15}$$

где уже $u = (x+\xi)y, v = (x+\xi)\eta$.

Далее, исключим в полученных равенствах производные χ_u, χ_v:

$$\bar{\Xi}\bar{X}_x = \bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{R}_\xi,\ y\bar{\Xi}\bar{X}_y + \eta\bar{\Xi}_\eta\bar{X} + \eta\bar{R}_\eta = (x+\xi)\bar{\Xi}_\xi\bar{X} + (x+\xi)\bar{R}_\xi$$

или

$$\begin{gathered} \bar{X}_x = \bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{\Xi}^{-1}\bar{R}_\xi, \\ y\bar{X}_y = (x+\xi)\bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\xi\bar{X} - \eta\bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\eta\bar{X} + (x+\xi)\bar{\Xi}^{-1}\bar{R}_\xi - \eta\bar{\Xi}^{-1}\bar{R}_\eta. \end{gathered} \tag{16}$$

Теорема 3. *Общее невырожденное решение функционального уравнения (1) при $c \neq 1$, в котором $u = (x+\xi)y, v = (x+\xi)\eta$, с точностью до подходящей замены координат может быть представлено в следующем виде:*

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = \alpha x + a_3 - a_4/y,\ \bar{y} = \gamma x + b_3/c + b_4/y^c - \gamma a_4/\alpha y, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi}\eta,\ \bar{\eta} = -\gamma\widehat{\xi}^c\eta^c/\alpha + \widehat{\eta}\eta, \\ \bar{\mu} = \eta\widehat{\xi}(\alpha\xi - a_3) + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \eta\widehat{\eta}(\alpha\xi - a_3) + (a_3\gamma/\alpha - b_3/c)\eta^c\widehat{\xi}^c + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = \alpha v\widehat{\xi} - a_4\widehat{\xi}v/u + \widehat{\mu},\ \ \chi^2 = \alpha v\widehat{\eta} - a_4\widehat{\eta}v/u + b_4\widehat{\xi}^c v^c/u^c + \widehat{\nu},\ c \neq 0, \end{array}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = \alpha x + a_3 - a_4/y,\ \bar{y} = \gamma x + b_3\ln y - a_4\gamma/\alpha y + b_4, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi}\eta,\ \bar{\eta} = -\gamma/\alpha + \widehat{\eta}\eta, \\ \bar{\mu} = \eta\widehat{\xi}(\alpha\xi - a_3) + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \eta\widehat{\eta}(\alpha\xi - a_3) - b_3\ln\eta + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = \alpha v\widehat{\xi} - a_4\widehat{\xi}v/u + \widehat{\mu}, \\ \chi^2 = \alpha v\widehat{\eta} - a_4\widehat{\eta}v/u + b_3\ln(u/v) + b_4 - a_3\gamma/\alpha + \widehat{\nu},\ c = 0, \end{array}\right. \tag{18}$$

$a_3 = \alpha\xi - \eta\beta, b_3 = \gamma\xi - \eta\delta - \gamma(1-c)a_3/\alpha$;

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = ca_3 - a_4/y^{1/c},\ \bar{y} = \gamma x + b_3 + b_4/y + kca_4/(c-1)y^{1/c}, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi}\eta^{1/c},\ \bar{\eta} = kc\widehat{\xi}^c\eta/(c-1) + \widehat{\eta}\eta^{1/c}, \\ \bar{\mu} = -ca_3\eta^{1/c}\widehat{\xi} + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \gamma\xi\eta\widehat{\xi}^c - \big(b_3 + kc^2a_3/(c-1)\big)\eta\widehat{\xi}^c - ca_3\eta^{1/c}\widehat{\eta} + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = -a_4(v/u)^{1/c}\widehat{\xi} + \widehat{\mu},\ \ \chi^2 = \gamma v\widehat{\xi}^c - a_4(v/u)^{1/c}\widehat{\eta} + b_4\widehat{\xi}^c v/u + \widehat{\nu},\ c \neq 0, \end{array}\right. \tag{19}$$

$a_3 = -\eta\beta,\ b_3 = \gamma\xi - \eta\delta - kca_3,\ k = \mathrm{const},\ c \neq 0$;

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = a_3 y,\ \bar{y} = b_1a_3xy - ka_3y + b_3\ln y + b_4, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi}/\eta,\ \bar{\eta} = b_1\xi + k + \widehat{\eta}/\eta,\ \ \bar{\mu} = \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = -b_3\ln\eta + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = a_3\widehat{\xi}u/v + \widehat{\mu},\ \ \chi^2 = b_1a_3u + a_3\widehat{\eta}u/v + b_3\ln(u/v) + b_4 + \widehat{\nu}, \end{array}\right. \tag{20}$$

$b_3 = \gamma\xi - \eta\delta + \gamma\eta b_2/b_1,\ c = 0,\ k, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta = \mathrm{const}.$

Доказательство теоремы 3. Систему (16) перепишем в следующем виде:

$$\bar{X}_x = \bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1,\ y\bar{X}_y = (x+\xi)\bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}\bar{X} + (x+\xi)\bar{A}_1 - \eta\bar{B}_1, \tag{21}$$

причем $\bar{A} = \bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\xi = \begin{pmatrix} \left(\ln\bar{\xi}\right)_\xi & 0 \\ \left(\bar{\eta}/\bar{\xi}\right)_\xi/\bar{\xi}^{c-1} & c\left(\ln\bar{\xi}\right)_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & ca_1 \end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$,
$\bar{B} = \bar{\Xi}^{-1}\bar{\Xi}_\eta = \begin{pmatrix} \left(\ln\bar{\xi}\right)_\eta & 0 \\ \left(\bar{\eta}/\bar{\xi}\right)_\eta/\bar{\xi}^{c-1} & c\left(\ln\bar{\xi}\right)_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & ca_2 \end{pmatrix}$, $\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$.

Лемма 4. *В системе* (21) $\bar{A} = const$, $\bar{A}_1 = const$, $\eta\bar{B}_\xi = \bar{A}$, $(\eta\bar{B})_\eta = 0$, $\bar{B}_\mu = 0$, $\bar{B}_\nu = 0$ *или* $\bar{B} = \xi\bar{A}/\eta + \bar{K}/\eta$, $\bar{K} = const$.

Доказательство. Действительно, продифференцируем первое уравнение в (21) по x и ξ, а также по y и ξ: $\bar{A}_\xi\bar{X}_x = 0$, $\bar{A}_\xi\bar{X}_y = 0$, следовательно, согласно первому неравенству в (2) получаем $\bar{A}_\xi = 0$. Если аналогично дифференцировать по η, μ, ν, а также по x и y, то получим $\bar{A}_\eta = \bar{A}_\mu = \bar{A}_\nu = 0$, поэтому $\bar{A} = \mathrm{const}$. Следовательно $\bar{A}_1 = \mathrm{const}$. Аналогично рассуждая, получаем остальные равенства.

Лемма 5. $a_1 = 0$, $(\eta a_2 + 1)b_1 = 0$, $-\eta\bar{A}\bar{B}_1 = -\eta\bar{B}\bar{A}_1 + \bar{A}_1$.

Доказательство. Для доказательства необходимо первое уравнение в (21) продифференцировать по y, а второе по x:

$$\bar{X}_{xy} = \bar{A}\bar{X}_y,\ y\bar{X}_{yx} = (x+\xi)\bar{A}\bar{X}_x + \bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}\bar{X}_x + \bar{A}_1.$$

Значит

$$y\bar{A}\bar{X}_y = (x+\xi)\bar{A}\bar{X}_x + \bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}\bar{X}_x + \bar{A}_1.$$

Затем подставляем производные из (21), получаем

$$\begin{gathered}\bar{A}((x+\xi)\bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}\bar{X} + (x+\xi)\bar{A}_1 - \eta\bar{B}_1)\\ = (x+\xi)\bar{A}(\bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1) + \bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}(\bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1) + \bar{A}_1.\end{gathered}$$

Приводя подобные, имеем:

$$\bar{A}(-\eta\bar{B}\bar{X} - \eta\bar{B}_1) = \bar{A}\bar{X} - \eta\bar{B}(\bar{A}\bar{X} + \bar{A}_1) + \bar{A}_1.$$

Далее дифференцируя по x и y, после чего учитывая первое неравенство в (2), получаем $\eta[\bar{A},\bar{B}] = -\bar{A}$, поэтому $-\eta\bar{A}\bar{B}_1 = -\eta\bar{B}\bar{A}_1 + \bar{A}_1$. По первому равенству имеем $\eta\begin{pmatrix}0 & 0\\ b_1a_2 - a_1b_2 & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ b_1 & ca_1\end{pmatrix}$. Сравнивая коэффициенты матриц слева и справа, получаем $a_1 = 0$, $\eta(b_1a_2 - a_1b_2) = -b_1$ или $\eta b_1a_2 = -b_1$. В результате приходим к утверждению леммы.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Из лемм 5 и 4, учитывая первое неравенство в (2), вытекают случаи:

1). $\bar{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix}1/\eta & 0\\ \gamma(1-c)/\alpha\eta & c/\eta\end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$;

2). $\bar{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix}1/c\eta & 0\\ k/\eta & 1/\eta\end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $k = \mathrm{const}$;

3). $\bar{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix}-1/\eta & 0\\ (\xi b_1 + k)/\eta & -c/\eta\end{pmatrix}$, $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}$, $\bar{B}_1 = \begin{pmatrix}-\gamma(c+1)/\eta b_1\\ \delta\end{pmatrix}$, $b_1 \neq 0$, $k = \mathrm{const}$.

Сначала рассмотрим первый случай. Распишем в явном виде уравнения из (21):

$$\bar{x}_x = \alpha,\ \bar{y}_x = \gamma,\ y\bar{x}_y = -\bar{x} + (x+\xi)\alpha - \eta\beta,$$
$$y\bar{y}_y = -\gamma(1-c)\bar{x}/\alpha - c\bar{y} + (x+\xi)\gamma - \eta\delta.$$

Интегрируя эту систему, получаем $\bar{x} = \alpha x + a_3 - \dfrac{a_4}{y}, \bar{y} = \gamma x + \dfrac{b_3}{c} + \dfrac{b_4}{y^c} - \dfrac{\gamma a_4}{\alpha y}, a_3 = \alpha\xi - \eta\beta = \mathrm{const}, b_3 = \gamma\xi - \eta\delta - \gamma(1-c)a_3/\alpha = \mathrm{const}$, $c \neq 0$. Из формул определяющих матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ вытекает: $\bar{\xi} = \widehat{\xi}\eta$, $\bar{\eta} = -\dfrac{\gamma}{\alpha}\widehat{\xi}^c\eta^c + \widehat{\eta}\eta$. Далее идем в формулы (16) $\bar{\mu} = \eta\widehat{\xi}(\alpha\xi - a_3) + \widehat{\mu}$, $\bar{\nu} = \eta\widehat{\eta}(\alpha\xi - a_3) + (\frac{a_3\gamma}{\alpha} - \frac{b_3}{c})\eta^c\widehat{\xi}^c + \widehat{\nu}$. Затем идем в уравнение (1): $\chi^1 = \alpha v\widehat{\xi} - a_4\dfrac{v}{u}\widehat{\xi} + \widehat{\mu}$, $\chi^2 = \alpha v\widehat{\eta} - a_4\dfrac{v}{u}\widehat{\eta} + b_4\dfrac{v^c}{u^c}\widehat{\xi}^c + \widehat{\nu}$. В итоге получаем (17).

Если же $c = 0$, то интегрируя последнюю систему, получаем $\bar{x} = \alpha x + a_3 - \dfrac{a_4}{y}, \bar{y} = \gamma x + b_3 \ln y - \dfrac{a_4\gamma}{\alpha y} + b_4$. Далее идем в формулы (16), затем в уравнение (1). В итоге получаем (18).

Рассмотрим второй случай. Распишем в явном виде уравнения из (21):

$$\bar{x}_x = 0,\ \bar{y}_x = \gamma,\ y\bar{x}_y = -\bar{x}/c - \eta\beta,\ y\bar{y}_y = -k\bar{x} - \bar{y} + (x+\xi)\gamma - \eta\delta.$$

Интегрируя, получаем $\bar{x} = ca_3 - \dfrac{a_4}{y^{1/c}}, \bar{y} = \gamma x + b_3 + \dfrac{b_4}{y} + \dfrac{kca_4}{(c-1)y^{1/c}}, a_3 = -\eta\beta = \mathrm{const}, b_3 = \gamma\xi - \eta\delta - kca_3 = \mathrm{const}$, $c \neq 0$. Далее находим: $\bar{\xi} = \widehat{\xi}\eta^{1/c}$, $\bar{\eta} = \dfrac{kc}{c-1}\widehat{\xi}^c\eta + \widehat{\eta}\eta^{1/c}$, $\bar{\mu} = -ca_3\eta^{1/c}\widehat{\xi} + \widehat{\mu}$, $\bar{\nu} = \gamma\xi\eta\widehat{\xi}^c - (b_3 + \dfrac{kc^2a_3}{c-1})\eta\widehat{\xi}^c - ca_3\eta^{1/c}\widehat{\eta} + \widehat{\nu}$. И, наконец, подставляя найденное в (1), получаем $\chi^1 = -a_4(\dfrac{v}{u})^{1/c}\widehat{\xi} + \widehat{\mu}$, $\chi^2 = \gamma v\widehat{\xi}^c - a_4(\dfrac{v}{u})^{1/c}\widehat{\eta} + b_4\dfrac{v}{u}\widehat{\xi}^c + \widehat{\nu}$. В итоге имеем (19).

И, наконец, третий случай приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\bar{x}_x = 0,\ \bar{y}_x = b_1\bar{x} + \gamma,\ y\bar{x}_y = \bar{x} + \gamma(1+c)/b_1,$$
$$y\bar{y}_y = (x+\xi)b_1\bar{x} - \eta b_2\bar{x} + c\bar{y} + (x+\xi)\gamma - \eta\delta.$$

Дифференцируя последнее по x, получаем $cb_1 = 0$, следовательно $c = 0$. Тогда $\bar{x} = a_3 y - \dfrac{\gamma}{b_1}, \bar{y} = b_1 a_3 xy + a_4 y + b_3 \ln y + b_4, a_4 = b_1 a_3\xi - b_2 a_3\eta = \mathrm{const}, b_3 = \gamma\xi - \eta\delta + \gamma\eta b_2/b_1 = \mathrm{const}$, $c \neq 0$. Далее находим: $\bar{\xi} = \widehat{\xi}/\eta$, $\bar{\eta} = b_1\xi + k + \widehat{\eta}/\eta$, $\bar{\mu}_\xi = 0$, $\bar{\mu}_\eta = -\gamma\bar{\xi}/b_1\eta^2$, $\bar{\nu}_\xi = \gamma b_1$, $\bar{\nu}_\eta = -\gamma\bar{\eta}/b_1\eta^2 - b_3/\eta + \gamma b_1\xi/\eta$, $a_4 = -ka_3$, $\gamma(1-b_1) = 0$. Из равенства смешанных производных $\bar{\nu}_{\xi\eta} = \bar{\nu}_{\eta\xi}$

и первого неравенства в (2) вытекает $\gamma = 0$, $a_3 \neq 0$. Поэтому $\bar{\mu} = \widehat{\mu}$, $\bar{\nu} = -b_3 \ln \eta + \widehat{\nu}$. Подставляя найденное в (1), получаем $\chi^1 = a_3 \dfrac{u}{v} \widehat{\xi} + \widehat{\mu}$, $\chi^2 = b_1 a_3 u + a_3 \widehat{\eta} \dfrac{u}{v} + b_3 \ln \dfrac{u}{v} + b_4 + \widehat{\nu}$. В итоге имеем (20).

Теорема 3 доказана полностью.

Заключение.

Сформулированная выше задача вложения полностью решена. Полученные решения обобщают соответствующие результаты, приводимые в статье [5].

Список литературы

1. *Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.

2. *Михайличенко Г.Г.* Двуметрические феноменологические структуры ранга (n+1,2) // *Сиб. матем. журн.* 1993. Т. 34, № 3. С. 132–143.

3. *Кулаков Ю.И.* Математическая формулировка теории физических структур // *Сиб. матем. журн.* 1971. Т. 12, № 5. С. 1142–1145.

4. *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // *Докл. АН СССР.* 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.

5. *Кыров В.А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2018. № 56. С. 5–16. DOI 10.17223/19988621/56/14

6. *Богданова Р. А., Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М.* Последовательное по рангу (n+1,2) вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // *Изв. вузов. Матем.* 2020. № 6. С. 9–14. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-9-14

7. *Кыров В.А.* Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // *Владикавк. матем. журн.* 2022. Т. 24, № 1. С. 44–53. DOI: https://doi.org/10.46698/u7680-5193-0172-d

8. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // *Изв. вузов. Матем.* 2021. № 8. С. 46–55. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-46-55

9. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Решение трех систем функциональных уравнений, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами // *Изв. вузов. Матем.* 2023. № 7. С. 42–51. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-7-42-51

10. *Богданова Р. А., Кыров В. А.* Решение системы функциональных уравнений, связанной с аффинной группой // *Владикавк. матем. журн.* 2024. Т. 6, № 3. С. 24-32. https://doi.org/10.46698/d7752-5993-6789-y

11. *Кострикин А. И. Введение в алгебру.* М.: Наука, 1977.

References

1. *Mikhailichenko G.G. Group symmetry of physical structures*, Barnaul: BGPU, 2003. (in Russian)

2. *Mikhailichenko G.G.* Dimetric Physical structures of rank (n+1,2) // *Siberian Math. Journal.* 1993. V. 34. N 3. P. 513–522.

3. *Kulakov Yu.I.* A mathematical formulation of the theory of physical structures // *Siberian Math. Journal.* 1971. V. 12. N 5. P. 822–824.

4. *Mikhailichenko G.G.* The solution of functional equations in the theory of physical structures // *Doklady Akademii Nauk.* 1972. V. 206. N 5. P. 1056–1058. (in Russian)

5. *Kyrov V.A.* On the embedding of two-dimetric phenomenologically symmetric geometries // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2018. N 56. P. 5–16 (in Russian). DOI 10.17223/19988621/56/1

6. *Bogdanova R.A., Mikhailichenko G.G., Muradov R.M.* Successive in Rank (n + 1, 2) Embedding of Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets // *Russian Mathematics.* 2020. N 64. P. 6–10 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-9-14

7. *Kyrov V.A.* Non-degenerate canonical solutions of some system of functional equations // *Vladikavkaz Mathematical Journal.* 2022. V. 24. N 1. P. 44–53 (in Russian).
DOI: https://doi.org/10.46698/u7680-5193-0172-d

8. *Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G.* Nondegenerate Canonical Solutions of one System of Functional Equations // *Russian Mathematics.* 2021. V. 65. N. 8. P. 40–48.
DOI: 10.3103/S1066369X21080053

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 87-101
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 87-101

9. *Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G.* Solving Three Systems of Functional Equations Associated with Complex, Double, and Dual Numbers // *Russian Mathematics.* 2023. V. 67. N 7. P. 34–42. DOI: 10.3103/S1066369X23070058

10. *Bogdanova R.A., Kyrov V.A.*. Solution of a system of functional equations associated with an affine group // *Vladikavkaz Mathematical Journal.* 2024. V. 26. N 3. P. 24-32. https://doi.org/10.46698/d7752-5993-6789-y

11. *Kostrikin A.I. Introduction to algebra*, Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)

Информация об авторе

Владимир Александрович Кыров, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 8220-8157 AuthorID: 213174
Scopus Author ID 9744004900

Author Information

Vladimir A. Kyrov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 8220-8157 AuthorID: 213174
Scopus Author ID 9744004900

Статья поступила в редакцию 20.01.2025;
одобрена после рецензирования 28.03.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 20.01.2025;
approved after reviewing 28.03.2025; accepted for publication 11.06.2025